

上海科技大学 2020 年攻读硕士学位研究生
招生考试试题

科目代码：992

科目名称：数值代数

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。
 2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上均无效。
-

1. (共 40 分，每小题 10 分) 考虑如下矩阵和向量

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

- (a) 给出方程组 $Ax = b$ 的解；
 - (b) 求矩阵 A 的行列式；
 - (c) 求矩阵 A 的逆矩阵；
 - (d) 求单位下三角矩阵 L ，以及上三角矩阵 U ，使得 $A = LU$ 。
2. (10 分) 令 A 是一个 3×4 矩阵，证明 A 的列线性相关。
3. (10 分) 设矩阵 A 的列线性无关，证明 $A^T A$ 是正定矩阵。
4. (10 分) 确定一个 3×3 Gauss 变换 L ，使得

$$L \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

5. (10 分) 设 x 和 y 是两个 $n \times 1$ 的向量，证明：当且仅当 x 和 y 线性相关且 $x^T y \geq 0$ 时，才有

$$\|x + y\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2.$$

6. (10 分) 考虑如下矩阵和向量

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

求 $x \in \mathbf{R}^2$ 使得

$$\|b - Ax\|_2 = \min_{y \in \mathbf{R}^2} \|b - Ay\|_2.$$

7. (15分) 考虑如下矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

求矩阵 A 的QR分解。

8. (15分) 考虑如下矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

求矩阵 A 的SVD分解。

9. (10分) 确定 $c = \cos \theta$ 和 $s = \sin \theta$, 使得

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

10. (20分) 证明: 若矩阵 A 是严格对角占优的, 则 A 非奇异。